



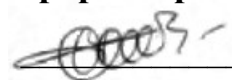
Частное учреждение высшего образования  
**ИНСТИТУТ ГОСУДАРСТВЕННОГО АДМИНИСТРИРОВАНИЯ**

---

**Кафедра социально-гуманитарных и естественнонаучных дисциплин**

**УТВЕРЖДАЮ**

**Проректор по учебной работе**

 П.Н. Рузанов

«26» августа 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

**Направление подготовки:**

**38.03.01 «Экономика»**

**Профиль: «Бухгалтерский учет и аудит»**

**Квалификация: бакалавр**

**Форма обучения: очная, заочная**

Направление подготовки	<b>38.03.01 ЭКОНОМИКА</b> (код и наименование направления подготовки)
Профиль подготовки	<b>Бухгалтерский учет и аудит</b> (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	<b>бакалавр</b>
Форма обучения	<b>очная/заочная</b>

Рабочая программа по дисциплине «**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**» составлена на основании требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования к минимуму содержания и уровню подготовки бакалавра для обучающихся по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»** (Приказ МОН № 1327 от 12.11.2015 г.)

#### **СОСТАВИТЕЛЬ**

Кандидат физико-математических наук  
Рыбаков Владимир Васильевич

## Содержание рабочей программы учебной дисциплины

1.	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы .....	4
2.	Место дисциплины в структуре образовательной программы ...	6
3.	Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся .....	6
4.	Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий .....	7
5.	Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....	16
6.	Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) .....	20
7.	Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	34
8.	Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине ...	35

## **1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Целью изучения дисциплины «Математический анализ» является обучение студентов основным приемам и методам формализации, анализа и исследования прикладных задач средствами дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных, а также элементам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, используемым как средство описания и моделирования разнообразных, в том числе и экономических процессов.

Основными задачами курса являются:

- Формирование представлений о месте математического анализа среди других математических наук, предмете изучения дисциплины, о его связях с другими методами математических исследований, о соотношении категорий непрерывного и дискретного, о вкладе математического анализа в изучении гносеологических и прикладных проблем естествознания. Ознакомление с историей возникновения и становления математического анализа как базовой математической дисциплины.
- Освоение основных разделов дисциплины (теория пределов числовых последовательностей и функций, понятие непрерывности, различные виды скоростей изменения функции на промежутке и в точке, экстремумы функций и методы их исследования, теория интегрирования и её приложения, свойства функций, заданных конечными соотношениями, которые связывают аргумент, функцию и ее производные).
- Формирование базовых представлений о теоретических и практических задачах математического анализа при моделировании технических, биологических, экономических и социальных процессов: формализация, основные допущения и упрощающие предположения, запись определяющих соотношений (уравнений состояния) математической модели, сопоставление с другими моделями и их классификация, понятие иерархии моделей. Понимание ограниченности применения любой модели и необходимости её совершенствования, основываясь на практических наблюдениях и статистическом материале.
- Ознакомление с основными инструментами математического анализа: аналитические, численные и численно-аналитические методы исследова-

ния как на бумаге, так и с помощью компьютеров, опираясь на прикладные программы такие как табличный процессор, MS Excel и др.).

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен овладеть следующими навыками по дисциплине «Математический анализ»:

**Знать:** основы математического анализа, необходимые для решения экономических задач;

**Уметь:** применять методы математического анализа, необходимые для решения экономических задач;

**Владеть:** навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

Коды компетенций	Содержание компетенций указано в учебном плане	Степень реализации компетенций
ОПК-2    ПК-4    ПК-5		Компетенции реализуются полностью

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математический анализ» реализуется в рамках базовой части Б.1. Б.7. обучающимся очной и заочной форм обучения.

Освоение дисциплины должно опираться на знания, умения и компетенции, приобретенные в процессе изучения школьного курса математики общеобразовательной средней школы.

## 3. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины для очной и заочной форм обучения составляет 7 зачетных единиц, 252 академических часа.

### 3.1. Объём дисциплины по видам учебных занятий (в часах)

Вид учебной деятельности	Кол-во часов 252
	Очная
	Семестры

	<b>1</b>
<b>Аудиторные занятия (всего), в том числе:</b>	<b>120</b>
Лекции	60
Практические занятия	60
Самостоятельная работа студента	<b>120</b>
Подготовка к экзамену и экзамен	27
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>экзамен</b>
<i>Общая трудоемкость: зачётные единицы</i>	7
<i>часы</i>	252

Вид учебной деятельности	<b>Кол-во часов 252</b>
	<b>Заочная</b>
	<b>Семестры</b>
	<b>1</b>
<b>Аудиторные занятия (всего), в том числе:</b>	<b>24</b>
Лекции	12
Практические занятия	12
Самостоятельная работа студента	<b>219</b>
Подготовка к экзамену и экзамен	9
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>экзамен</b>
<i>Общая трудоемкость: зачётные единицы</i>	7
<i>часы</i>	252

#### **4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

4.1. Разделы (темы) дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий для очной и заочной форм обучения (в академических часах)

## **Очная форма обучения**

№ п/п	Раздел/тема Дисциплины	Общая трудоём- кость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоёмкость (в часах)			
			аудиторные учебные занятия			самостоятель- ная работа обучающихся
			всего	лекции	семинары, практические занятия	
1.	Тема 1. Теория пределов.	8	4	4	7	
2.	Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	8	4	4	7	
3.	Тема 3. Формула Тейлора.	8	4	4	7	
4.	Тема 4. Экстремумы функции от одной переменной.	8	4	4	7	
5.	Тема 5. Исследование функций и построение графиков.	8	4	4	7	
6.	Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл.	8	4	4	7	
7.	Тема 7. Интегрирование рациональных функций.	8	4	4	7	
8.	Тема 8. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы и тригонометрические функции.	8	4	4	7	
9.	Тема 9. Определенный интеграл.	8	4	4	7	
10	Тема 10. Функции многих переменных. Теория пределов.	8	4	4	7	
11	Тема 11. Частные производные первого порядка.	8	4	4	7	
12	Тема 12. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции от двух переменных.	8	4	4	7	
13	Тема 13. Безусловный экстремум функции. Классическая задача математического программирования.	8	4	4	7	
14	Тема 14. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-го порядка. Тема 7. Общая теория линейного ОДУ n-го порядка.	8	4	4	7	
15	Тема 15. Линейное однородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.	8	4	4	7	
		120	60	60	105	
	Контроль (экзамен)	27				
	Итого	252				



## Заочная форма обучения

№ п/п	Раздел/тема Дисциплины	Общая трудоём- кость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)		
			аудиторные учебные занятия		самостоятель- ная работа обучающихся
			всего	лекции	
1.	Тема 1. Теория пределов.	4	2	2	36
2	Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Тема 3. Формула Тейлора. Тема 4. Экстремумы функции от одной переменной. Тема 5. Исследование функций и построение графиков.	4	2	2	36
3	Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл. Тема 7. Интегрирование рациональных функций. Тема 8. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы и тригонометрические функции. Тема 9. Определенный интеграл.	4	2	2	36
4	Тема 10. Функции многих переменных. Теория пределов. Тема 11. Частные производные первого порядка. Тема 12. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции от двух переменных.	4	2	2	36
5	Тема 13. Безусловный экстремум функции. Классическая задача математического программирования.	4	2	2	36

№ п/п	Раздел/тема Дисциплины	Общая трудоём- кость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоёмкость (в часах)		
			аудиторные учебные занятия		самостоятель- ная работа обучающихся
			лекции	семинары, практические занятия	
6	Тема 14. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-го порядка. Общая теория линейного ОДУ n-го порядка. Линейное однородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Тема 15. Линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.	4	2	2	39
	Подготовка к экзамену	9	12	12	219
	ИТОГО:	252			

4.2 Содержание дисциплины, структурированное по разделам (темам)

### Математический анализ функций одной переменной

#### Тема 1. Теория пределов.

Числовая последовательность и предел числовой последовательности. Принцип Больцано-Вейерштрасса. Второй замечательный предел. Число  $e$  – основание натуральных логарифмов. Элементарные функции. Предел функции, определение и свойства. Первый и второй замечательный предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Техника вычисления пределов функций.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Элементарные приемы раскрытия неопределенностей вида  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  и  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ .
2. Использование второго замечательного предела.
3. Числовые ряды. Частичная сумма ряда.
4. Признаки сходимости числового ряда. Суммирование числового ряда.
3. Непрерывные функции. Разрывные функции. Точки разрыва и их классификация.
4. Свойства функции, непрерывной на отрезке. Использование непрерывности функций в практических задачах.

**Цели обсуждения:** освоить понятие числовой последовательности и предел числовой последовательности; освоить ключевое понятие математического

анализа – предел функции.

### ***Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.***

Понятие производной функции, её геометрический и физический смысл. Таблица производных. Правила дифференцирования.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Вычисление производных с использованием таблицы производных и правил дифференцирования.
2. Дифференциал функции. Производная сложной и обратной функций.
3. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
4. Признаки возрастания и убывания функций.

*Цели обсуждения:* обучение навыкам дифференцирования функций.

### ***Тема 3. Формула Тейлора.***

Производные и дифференциалы 2-го и более высокого порядка. Физический смысл производной второго порядка. Правило Лопиталю. Сравнительная скорость роста показательной, логарифмической и степенной функций. Формула Тейлора. Формула Маклорена. Остаточный член и его формы.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Понятие производной  $n$ -го порядка.
2. Высшие производные некоторых функций.
3. Дифференциалы высших порядков.
4. Вычисление коэффициентов ряда Тейлора.
5. Степенные ряды простейших элементарных функций.
6. Интервал сходимости степенного ряда. Признаки сходимости.
7. Формула Тейлора и направление выпуклости графика функции.
8. Точки перегиба.

*Цели обсуждения:* освоение универсального инструмента для исследования функций – формулы Тейлора.

### ***Тема 4. Экстремумы функции от одной переменной.***

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Описание множества точек, подозрительных на экстремум. Достаточные условия экстремума по смене знака первой производной. Достаточные условия экстремума по высшим производным.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Выделение точек, подозрительных на экстремум функции.
2. Применение достаточных условий экстремума по первой производной.
3. Применение достаточных условий экстремума по высшим производным.

*Цели обсуждения:* научиться находить точки экстремума функций и определять тип экстремума.

### ***Тема 5. Исследование функций и построение графиков.***

Порядок построения графика функции. Особые точки на графике. Асимп-

тоты графика функции.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней;
2. Выяснить симметрию графика и периодичность;
3. Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности;
4. Определить нули функции и области постоянства знака;
5. Найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции;
6. Определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости и выпуклости;
7. Найти асимптоты в случае их существования.

*Цели обсуждения:* развитие навыков построения графиков функций по характерным точкам, обучение технике построения графика функции.

**Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл.**

Определение и свойства неопределённого интеграла. Таблица первообразных. Приёмы вычисления первообразных непосредственным интегрированием, подстановкой и по частям.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Использование таблицы первообразных.
2. Элементарные приёмы интегрирования.
3. Применение методов интегрирования подстановкой и по частям.

*Цели обсуждения:* освоение понятия неопределённого интеграла и простейших приёмов интегрирования.

**Тема 7. Интегрирование рациональных функций.**

Вычисление неопределённого интеграла  $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$  Интегрирование рациональных функций с помощью разложения в сумму простейших дробей. Приём разложения дроби на простейшие, когда знаменатель – произведение простых биномов.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Представление рациональных функций в виде суммы простейших дробей.
2. Интегрирование простейших дробей.

*Цели обсуждения:* освоение метода разложения на простейшие дроби для вычисления интегралов от рациональных функций.

**Тема 8. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы и тригонометрические функции.**

Подстановки Эйлера. Рационализация тригонометрических выражений и выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Вычисление интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$  с помощью подстановок Эйлера.

2. Использование рационализирующих подстановок в виде тангенса половинного угла.

3. Подстановки, рационализирующие иррациональные выражения.

4. Вычисление интегралов вида  $\int R(x, x^{\frac{r}{k}}, \dots, x^{\frac{m}{n}}) dx$ .

*Цели обсуждения:* изучить рационализирующие подстановки.

### ***Тема 9. Определенный интеграл.***

Определённый интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Некоторые приложения определённого интеграла.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Вычисление определённого интеграла, исходя из его свойства как площади криволинейной трапеции со знаком.

2. Непосредственные применения формулы Ньютона-Лейбница.

3. Замена переменной в определённом интеграле.

4. Формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

5. Вычисление работы силы, длины пройденного телом пути.

6. Вычисление площади криволинейной трапеции.

7. Вычисление объёма тел вращения.

8. Понятие о несобственных интегралах.

*Цели обсуждения:* освоить понятие определённого интеграла, его геометрический смысл и физические приложения.

## **Математический анализ функций нескольких переменных**

### ***Тема 10. Функции многих переменных. Теория пределов.***

Множество допустимых значений аргументов и множество значений функции. Открытые и замкнутые множества на плоскости и в пространстве. Их свойства. Линии уровня и их применение для решения простейших задач на экстремум. Определение предела функции двух переменных. Предел функции по направлению. Определение непрерывности функции. Свойства непрерывной функции, заданной на компактном множестве.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Примеры поверхностей, изображаемых функциями двух переменных.

2. Представление области определения функции двух переменных на плоскости.

3. Построение линий уровня и их использование.

4. Вычисление пределов функции двух переменных.

5. Непрерывность функции, свойства и применения.

*Цели обсуждения:* освоить основные понятия многомерного анализа.

### ***Тема 11. Частные производные первого порядка.***

Частные производные первого порядка функции нескольких переменных. Условие дифференцируемости функции в точке. Дифференцирование сложной функции. Дифференциал функции.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Правила вычисления частных производных первого порядка функции нескольких переменных.
2. Производные сложной функции.
3. Дифференцирование функции по направлению.
4. Градиент функции. Направления наибольшего возрастания и убывания функции.
5. Дифференциал.
6. Дифференцирование сложной функции с помощью дифференциала.

*Цели обсуждения:* научиться и закрепить навыки дифференцирования функций нескольких переменных.

### ***Тема 12. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции от двух переменных.***

Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных 2-го порядка. Правила вычисления высших дифференциалов функции. Формула Тейлора для функции двух переменных.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Вычисление частных производных второго порядка.
2. Вычисление дифференциалов 2-го порядка.
3. Квадратичная форма дифференциала 2-го порядка.
4. Определение положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
5. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.
6. Формула Тейлора.

*Цели обсуждения:* освоить навыки вычисления частных производных высших порядков и формулы Тейлора, как инструмента для исследования функций на экстремум.

### ***Тема 13. Безусловный экстремум функции.***

Локальный минимум функции и локальный максимум. Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия локального экстремума для функции 2-х переменных.

#### ***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Отыскание точек подозрительных на экстремум (использование необходимых условий экстремума).
2. Использование достаточных условий экстремума функции.

*Цели обсуждения:* научиться находить безусловные экстремумы функций нескольких переменных.

***Классическая задача математического программирования.***

Метод множителей Лагранжа, его модификация. Необходимые и достаточные условия экстремума функции с ограничениями-равенствами.

***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Составление функции Лагранжа.
2. Представление необходимых условий экстремума с помощью функции Лагранжа.
3. Поиск точек подозрительных на экстремум.
4. Проверка достаточные условия экстремума целевой функции, когда существует экстремум функции Лагранжа.
5. Проверка достаточные условия экстремума целевой функции, когда не существует экстремум функции Лагранжа.

*Цели обсуждения:* освоить технику решения задач на условный экстремум.

***Тема 14. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)  $n$ -го порядка.***

Примеры из физики и экономики. Нормальная форма ОДУ  $n$ -го порядка, разрешённого относительно старшей производной. ОДУ 1-го порядка  $y' = f(x, y)$ . Его общее и частное решения. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особое решение задачи Коши.

***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Решение однородных ОДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными.
2. Решение задачи Коши.
3. Линейное ОДУ 1-го порядка.
4. Решение неоднородных ОДУ 1-го порядка методом вариации произвольной постоянной.
5. Уравнение Бернулли.
6. Уравнение Риккатти.

*Цели обсуждения:* овладение навыками решения ОДУ с разделяющимися переменными.

***Общая теория линейного ОДУ  $n$ -го порядка.***

*Содержание лекции.* Теорема: множество решений линейного ОДУ  $n$ -го порядка образуют линейное векторное подпространство размерности  $n$ . Формула Лиувилля. Фундаментальная система решений задачи Коши.

***Перечень вопросов для обсуждения:***

1. Исследование системы функций на линейную зависимость с помощью детерминанта Вронского.
2. Построение дифференциального уравнения по фундаментальной системе решений.
3. Нахождение общего решения уравнения второго порядка (у которого известно одно частное решение) с помощью формулы Лиувилля.

*Цели обсуждения:* углубить знания о свойствах решений линейных диффе-

ренциальных уравнений.

**Тема 15. Линейное однородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.**

Вид общего решения в зависимости от знака дискриминанта характеристического уравнения. Линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Составление характеристического уравнения.
2. Запись общего решения в зависимости от знака его дискриминанта.

*Цели обсуждения:* научиться решать ОДУ указанного вида в общем случае.

**Линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.**

Структура частного решения. Метод неопределённых коэффициентов.

**Перечень вопросов для обсуждения:**

1. Структура частного решения.
2. Метод неопределённых коэффициентов.

*Цели обсуждения:* изучить структуру частного решения ОДУ указанного вида и научиться применять метод неопределённых коэффициентов.

**5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине:**

По первой части курса «Математический анализ функции одной переменной» для самостоятельного изучения теоретического материала приведены номера глав и параграфов из учебника [2]. Для практических занятий указаны задачи из книги [2], а также номера лекций из дополнительной литературы [5].

По второй части дисциплины «Математический анализ функций нескольких переменных» для самостоятельного изучения теоретического материала и решения задач даны ссылки на источники [1, 3] и задачник [2] списка основной литературы.

Наименование раздела (темы) дисциплины	Общая трудёмкость	Форма самостоятельной работы	Сроки предоставления работ
--	-------------------	------------------------------	----------------------------



	часы		
<b>1-ой семестр</b>			
<b>Математический анализ функций одной переменной</b>			
<b>Раздел 1. Введение в анализ</b>			
Тема 1. Теория пределов.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекции № 1, №2, №3, №4, №5; Гл. 3, §1-4. Гл. 4, §2-8, Гл. 4, §12. Решение задач: с. 14, чётные №№ 22-36. с. 17, чётные №№ 64-68. с. 48, чётные №№ 234-250. с. 49, чётные №№ 282-296. с. 46, пример 5. с. 47, №№ 224-227.	*)
<b>Раздел 2. Дифференциальное исчисление</b>			
Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №6, №7; Гл. 5, §1-4, Гл. 5, §3,8,6,11. Решение задач: с. 56, чётные №№ 12-18. с. 57, чётные №№ 36-48. с. 56, чётные №№ 20-32. с. 72, № 282.	
Тема 3. Формула Тейлора.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №9, №10; Гл. 5, §14.	
Тема 4. Экстремумы функции от одной переменной.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №8; Гл. 5, §12, 13, 10.	
Тема 5. Исследование функций и построение графиков.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №11; Гл. 5, §15. Решение задач: стр. 78, 79, примеры 8,9. С. 81, №№ 298, 302, 312, 326,	

\*) Студенты предоставляют выполненные самостоятельно работы по теме каждый раз перед началом практического занятия, посвящённого следующей за ней теме программы.

		334, 342.	
<b>Раздел 3. Интегральное исчисление</b>			
Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №12, №13; Гл. 6, §1-3, ; Гл. 6, §4. Решение задач: с. 86, чётные №№ 2-20.	
Тема 7. Интегрирование рациональных функций.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №13, стр. 115; Гл. 6, §5. Решение задач: стр. 101, чётные №№ 230-240.	
Тема 8. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы и тригонометрические функции.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №14; Гл. 6, §4. Решение задач: стр. 90, чётные №№ 36-56. С. 93, чётные №№ 102-116.	
Тема 9. Определенный интеграл.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала: лекция №15, №16, №17; Гл. 6, §§ 6, 8, Гл. 6, §§ 7, 9, 10, ; Гл. 6, §11. Решение задач: с. 104, чётные №№ 254-268. с. 108, чётные №№ 290-294. с. 110, чётные №№ 308-316. с. 111, чётные №№ 318-324.	
<b>3-ий семестр</b>			
<b>Математический анализ функций нескольких переменных</b>			
<b>Раздел 1. Дифференциальное исчисление</b>			
Тема 1. Функции многих переменных. Теория пределов.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач: с. 181, чётные №№ 39-52, чётные №№ 53-58. с. 183-184, №№ 59-66, 75-79. Дополнительные задачи выдаются преподавателем.	

Тема 2. Частные производные первого порядка.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач: с. 185-186, чётные №№ 1-19. с. 190-191, чётные №№ 46-58. с. 190, №№ 34-45; с. 193 №№ 81-88, 89-90.	
Тема 3. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции от двух переменных.	4	Решение задач, выданных преподавателем.	
<b>Раздел 2. Экстремум функций нескольких переменных</b>			
Тема 4. Безусловный экстремум функции.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач: с. 195 чётные №№ 109-119; с.196 чётные №№ 122-128	
Тема 5. Классическая задача математического программирования.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач, выданных преподавателем.	
<b>Раздел 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>			
Тема 6. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) $n$ -го порядка.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач: с. 226 чётные №№ 24-31, 32-35. с. 228, чётные № № 43-58. С. 229, чётные №№ 59-66.	
Тема 7. Общая теория линейного ОДУ $n$ -го порядка.	4	Самостоятельное освоение теоретического материала. Решение задач, предложенных преподавателем.	
Тема 8. Линейное однородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.	4	Решение задач с. 232-233, чётные №№ 84-97, и задач, предложенных преподавателем.	
Тема 9. Линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.	4	Решение задач: с. 236-237, чётные №№ 98-117.	

## **6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Основой для определения рейтинга обучающегося являются интегральные рейтинговые показатели учёбы студента за семестр и за учебный год, которые, в частности, складываются из рейтинговых показателей по каждой учебной дисциплине. Эти показатели разнесены по трём блокам: оценки успеваемости обучающегося по дисциплине в течение семестра (**Блок 1**), по итогам экзаменационной сессии (**Блок 2**) и оценки социальных характеристик обучающегося (**Блок 3**). Последний формируется Деканатом.

Соответствие оценок пятибалльной шкалы рейтинговым и европейским оценкам представлено в таблице 1: от 90% до 100% - «Отлично», от 75 до 89% – «Хорошо», от 60 до 74% – «Удовлетворительно», менее 60% – «Неудовлетворительно».

*Таблица 1*

**Шкала соответствия оценок**

<b>Оценка по пятибалльной шкале</b>	<b>Рейтинговая оценка, %</b>	<b>Европейская оценка</b>
«Отлично» (5)	90-100 %	A
«Хорошо» (4)	82-89 %	B
	75-81 %	C
«Удовлетворительно» (3)	67-74 %	D
	60-66 %	E
«Неудовлетворительно» (2)	Менее 60 %	F

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется при помощи трёх контрольных проверок (срезов) в **6-ю, 12-ю и 15/16-ю** недели семестра.

**1-ый контрольный срез знаний** по дисциплине «Математический анализ» представляет собой фронтальный опрос аудитории по темам 1-4. Примерный список вопросов содержится в примерном перечне вопросов к экзамену. Этот список сообщается студентам заранее. Студент обязан ответить на поставленный вопрос сразу, без подготовки. Каждому студенту в процессе фронтального опроса предоставляется возможность дать ответы не менее, чем на 5 вопросов списка. В зависимости от правильности и полноты ответов студента ему соответственно выставляется оценка по 100-балльной (%%) шкале, которая заносится в «Ведомость оценки успеваемости обучающихся в течение семестра».

**2-ой и 3-ий контрольные срезы знаний** суть внеаудиторные контрольные работы. Типовые варианты контрольных работ приведены ниже. Оценки за контрольные работы выставляются в виде доли в %% решённых студентом задач от полного набора задач варианта. Критерии оценки контрольных работ сообщаются студентам заранее. Результаты заносятся в «Ведомость оценки успеваемости обучающихся в течение семестра».

Результирующей оценкой по дисциплине (по Блоку 1) является **средняя оценка**, полученная обучающимся по итогам всех форм контроля в течение всего семестра.

Преподаватель в обязательном порядке информирует обучающихся о критериях оценки успеваемости по дисциплине и индивидуально каждого студента о результатах контрольных срезов, о достигнутом уровне успеваемости (в %) по дисциплине по каждому срезу в отдельности.

Рейтинговая система предусматривает поощрение обучающихся за участие в научной работе или особые успехи в изучении дисциплины. Преподаватель может самостоятельно принимать решения о поощрении обучающихся дополнительными рейтинговыми баллами за подготовку доклада и выступление на научном семинаре, кружке или конференции, опубликовании научной работы и прочие достижения.

### **Примеры типовых вариантов контрольных работ (2-ой семестр)**

#### **Варианты контрольной работы № 1**

**Задача № 1.** Вычислить предел.

1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + \sqrt{x^3 + 2}}{x^2 - x + 1}$	4	$\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{1}{x+4} + \frac{8}{x^2 - 16} \right)$
---	---	---	--

2	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$	5	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x - 1}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + 2x}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}$

**Задача № 2.** Исследовать функцию:

- Определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней;
- Выяснить симметрию графика и периодичность;
- Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности;
- Определить нули функции и области постоянства знака;
- Найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции;
- Определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости и выпуклости;
- Найти асимптоты в случае их существования;
- Указать те или иные особенности графика;
- Построить график функции.

1	$y = x^2 \cdot e^{-x^2}$	4	$y = e^x - e^{-2x}$
2	$y = \sqrt[3]{x-1}$	5	$y = (2x-1)/(x-1)^2$
3	$y = (3x+6)e^{x/3}$	6	$y = x^2 e^{-x}$

### Варианты контрольной работы № 2

**Задача № 1.** Вычислить интегралы

1	$\int x^2 \sqrt[5]{x^3 - 8} dx$ $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx$	3	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$ $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
2	$\int \sqrt{3 + \cos 5x} \sin 5x dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$	4	$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$ $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Задача № 2.** Вычислить интегралы

1	$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$	3	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$
2	$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$	4	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

**Задача № 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1	$y = x^2, y = \sqrt{x}$	3	$y^2 = 4x, x = 5$
2	$xy = 4, x = 4, y = 4, x = 0, y = 0$	4	$y =  x  + 1, y = 0, x = -2, x = 1$

**Примеры типовых вариантов контрольных работ (3-ой семестр)**

### Варианты контрольной работы № 1

**Задача № 1.** Найти экстремумы функции  $z = x^2 y^2 + y^3 - 12 y$ .

**Задача № 2.** Найти условные экстремумы функции  $u = 5 - 3x - 4y$   
относительно заданного уравнения связи  $x^2 + y^2 = 25$ .

**Задача № 1.** Найти экстремумы функции

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad (x > 0, y > 0).$$

**Задача № 2.** Найти расстояние от начала координат до кривой

$$7x^2 - 6xy + 7y^2 = 8.$$

Задача сводится к нахождению точки условного минимума функции

$$u = \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Объясните, почему!

**Задача № 1.** Найти экстремумы функции  $z = e^{x^2-y} (5 - 2x + y)$ .

**Задача № 2.** Найти условные экстремумы функции  $u = 1 - 4x - 8y$

относительно заданного уравнения связи  $x^2 - 8y^2 = 8$ .

### Варианты контрольная работа № 2

**Задача № 1.** Решить задачу Коши:

1	$y' = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tgy},$	$y(\pi/4) = \pi/4.$
2	$xy' - y = 0,$	$y(1)=1.$
3	$yy' + x = 0,$	$y(1)=0.$
4	$(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0,$	$y(1)=0.$
5	$(1+x^2)dy - 2xydx = 0,$	$y(1)=2.$
6	$2y'\sqrt{x} = y,$	$y(4) = 1.$
7	$xy' = y/\ln x,$	$y(e) = 1.$
8	$x^2y' + y = 0,$	$y(1)=1.$
9	$y' = (2y + 1) \operatorname{ctg}x,$	$y(\pi/4) = 1/2.$
10	$x^2y' + y^2 = 0,$	$y(-1) = 1.$

**Задача № 2.** Найти общее решение уравнения.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $y'' - 5y' - 6y = 0;$  | 7. $y'' + 4y = 0;$        |
| 2. $y'' + 9y = 0;$        | 8. $y'' + 4y' + 5y = 0;$  |
| 3. $y'' + 6y' + 25y = 0;$ | 9. $y'' + y = 0;$         |
| 4. $y'' - 3y' + 2y = 0;$  | 10. $y'' + 4y' + 4y = 0;$ |
| 5. $y'' - 4y' + 3y = 0;$  | 11. $y'' - y = 0;$        |
| 6. $y'' - 6y' + 9y = 0;$  | 12. $y'' + 4y' + 5y = 0;$ |

**Задача № 3.** Найти общее решение уравнения.

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| 1. $y'' + 4y = 1 - 3x;$ | 4. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x};$ |
|-------------------------|---|



2.  $y'' + y = \sin 2x$ ;

5.  $y'' + 4y = 12 \cos 2x$ ;

3.  $y'' - 2y' + y = \sin x + 2 \cos x$ ;

6.  $y'' - 4y' + 5y = 2 \cos x + 6 \sin x$ ;

### О порядке подведения итогов экзаменационной сессии

Информирование обучающихся о порядке и правилах проведения экзамена по дисциплине и критериях выставления оценок за все промежуточные виды контроля знаний осуществляется преподавателем в начале семестра.

Все результаты контроля успеваемости обучающихся отражаются в журналах учета посещаемости и успеваемости. На основе оценок, занесенных в журналы учета посещаемости и успеваемости, преподаватели выставляют итоговые оценки по дисциплине, заполняют соответствующие ведомости и зачетные книжки студентов.

В ведомостях по итогам экзамена выставляется оценка по 5-ти балльной шкале, рейтинговая оценка, оценка по системе ECTS.

Например:

4	B	82
5	A	95
2	F	40

В зачетных книжках по итогам экзамена выставляется оценка по 5-ти балльной шкале, рейтинговая оценка, оценка по системе ECTS. Например:

хорошо (82/B)
------------------

или

отлично (95/A)
-------------------

Рейтинговым показателем по Блоку 2 является оценка, полученная обучающимся на экзамене или зачете. Ответ обучающегося на экзамене или зачете оценивается в % с учетом шкалы соответствия рейтинговых оценок оценкам пятибалльной шкалы (таблица 1).

При получении обучающимся на экзамене неудовлетворительной оценки в ведомость выставляется рейтинговая оценка в %% (менее 60 %), соответствующая его фактическому ответу.

При передаче экзамена или зачета применяется следующее правило

при формировании рейтинговой оценки: 1-я пересдача – фактическая рейтинговая оценка, полученная обучающимся за ответ, минус 10%; 2-я пересдача – фактическая рейтинговая оценка, полученная обучающимся за ответ, минус 20%.

### *Примерный перечень вопросов к зачету*

#### **Часть I. Математический анализ функций одной переменной**

*Введение в анализ.*

1. Степенная функция (свойства, график).
2. Показательная функция (свойства, график).
3. Логарифмическая функция (свойства, график).
4. Основные тригонометрические функции на тригонометрическом круге (определения и свойства).
5. Четные и нечетные функции (определения, примеры).
6. Функция одной переменной (определение и способы задания функции).
7. Элементарные функции (определение).
8. Рациональная функция и ее график.

*Элементы теории пределов.*

1. Предел числовой последовательности (определение и свойства пределов).
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Признак Вейерштрасса существования предела последовательности. Второй замечательный предел (без доказательства).
4. Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов.
5. Предел функции (определение, свойства пределов).
6. Первый замечательный предел.
7. Определение функции, непрерывной в точке. Свойства функции, непрерывной на отрезке (без доказательства). Показать эти свойства на примере:  $y = x^3$ ,  $-2 \leq x \leq 1$ .
8. Теорема о непрерывности элементарных функций (формулировка, примеры).
9. Наклонные асимптоты графика функции одной независимой переменной.

*Дифференциальное исчисление.*

1. Производная функции. Теорема о связи существования производной функции в точке с непрерывностью функции в этой точке.
2. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
3. Производная сложной функции.
4. Производная обратной функции (пример: вывод формулы для производной функции  $y = \arcsin x$ ).

5. Теорема Лагранжа о конечных приращениях (формулировка и доказательство).
6. Формула Тейлора для функции с остаточным членом в форме Лагранжа (без доказательства).
7. Описание множества точек, подозрительных на экстремум функции одной независимой переменной.
8. Производная суммы, произведения и частного двух функций (с доказательством какой-либо одной из этих формул на выбор).
9. Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в локальном виде.
10. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
11. Необходимое условие экстремума функции одной переменной. Классификация точек подозрительных на экстремум.
12. Достаточное условие экстремума функции в стационарной точке по смене знака производной этой функции в окрестности данной точки.
13. Достаточный признак экстремума функции в стационарной точке по знаку ненулевой производной минимального порядка, вычисленной в этой точке.
14. Правило Лопиталя (без доказательства). Теорема о сравнительной скорости роста степенной и логарифмической функций на бесконечности.
15. Правило Лопиталя (без доказательства). Теорема о сравнительной скорости роста степенной и показательной функций на бесконечности.
16. Точка перегиба на графике функции (определение и аналитический признак).

### *Интегральное исчисление.*

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площади фигуры, ограниченной эллипсом.
3. Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$ .
4. Замена переменной в определенном интеграле.
5. Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси  $Oy$ .
6. Теорема об интегрировании рациональных функций с помощью разложения на простейшие дроби (формулировка).

$$t = tg \frac{x}{2}.$$

7. Рационализирующая подстановка
8. Вычисление неопределенного интеграла вида  $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ .
9. Вычисление неопределенного интеграла вида  $\int R(x, x^{\frac{r}{k}}, \dots, x^{\frac{m}{n}}) dx$ , где  $R$  – выражение, полученное при помощи четырех арифметических дей-

ствий над указанными степенями  $x$ , показатели степеней – рациональные числа.

10. Вычисление неопределенного интеграла вида  $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ .

11. Формула интегрирования по частям (пример: вычисление первообразной  $\int \sqrt{x^2+1} dx$ ).

12. Свойства неопределенных интегралов.

13. Замена переменной в неопределенном интеграле (пример: вычисление

первообразной  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ).

14. Площадь криволинейной трапеции (определение и формула для вычисления площади).

15. Вычисление неопределенного интеграла  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$  (при помощи замены  $x = a \sin t$ ).

16. Замена переменной в неопределенном интеграле (пример: вычисление

первообразной  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$  при помощи замены  $x = a \sin t$ ).

17. Вычисление неопределенного интеграла вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  – выражение от  $\sin x$  и  $\cos x$ , полученное с помощью четырех арифметических действий.

18. Формула интегрирования по частям (пример: вычисление первообразной  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ).

19. Теорема:  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$  для любой непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ .

### **Примеры типовых задач к зачету**

#### **Часть I. Математический анализ функций одной переменной**

Найти пределы:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{2005}}{n+1}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3^{100}}{2n+100}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+8};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 1}{3^x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

Какое выражение больше при достаточно больших  $x$ :

а)  $2006x+2004$  или  $0.001x^2$ ? б)  $2^x$  или  $x^{2005}$ ?

Определить область существования следующих функций:

а)  $y = \frac{x^2}{1+x}$ ; б)  $y = \sqrt{3x-x^3}$ ; в)  $y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ; г)  $y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 3}{3-x}}$ ;  
 д')  $y = \lg(x^2 - 4)$ ; д'')  $y = \lg(x+2) + \lg(x-2)$ ; е)  $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ ;  
 ж)  $y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ ; з)  $y = \ln(\ln x)$ ; и)  $y = \arccos(2 \sin x)$ .

Определить области существования и множество значений следующих функций:

а)  $y = \sqrt{2+x-x^2}$ ; б)  $y = \lg(1-2 \cos x)$ ; в)  $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ ;  
 г)  $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$ ; д)  $y = \sin^2 x - \sin x - 1$ .

Определить, какие из функций являются четными, а какие нечетными:

а)  $f(x) = 3x - x^3$ ; б)  $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ ; в)  $f(x) = a^x + a^{-x}, a > 0$ ;  
 г)  $f(x) = \ln \frac{5-2x}{5+2x}$ ; д)  $\sqrt{x^{2/3}}$ ; е)  $\sqrt{x^2}$ ; ж)  $\ln\left(x^3 + \sqrt{1+x^6}\right)$ .

Найти производные функций

1)  $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$ ; 2)  $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ ; 3)  $f(x) = x^3(4+2x-x^2)$ ;  
 4)  $f(x) = \sqrt{x}(2x^2-x)$ ; 5)  $f(x) = (2x-3)(1-x^3)$ ; 6)  $y = \frac{1+2x}{3-5x}$ ; 7)  $y = \frac{3-4x}{x^2}$ ;  
 8)  $y = \sqrt{9-x^2}$ ; 9)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ ; 10)  $y = \sqrt{\cos x}$ ; 11)  $y = \operatorname{tg} 2x$ .

Найти максимумы и минимумы функций:

1)  $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$ ; 2)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ ;  
 3)  $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x+3}$ ; 4)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ; 5)  $f(x) = x^2e^{-x}$ ; 6)  $f(x) = xe^{-x}$ ;  
 7)  $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$ ; 8)  $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ; 9)  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ ; 10)  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

Провести полное исследование функций и построить их графики:

а)  $y = x^3 - 3x$ ; б)  $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ ; в)  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ; г)  $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$ .

Построить графики функций:

1)  $y = \sqrt[3]{x}$ ; 2)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ; 3)  $y = \sqrt{x^2+1}$ ; 4)  $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$ ;  
 5)  $y = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ ; 6)  $y = x\sqrt{1-x}$ ; 7)  $y = x^3e^{-x}$ ; 8)  $y = x^2e^{1/x}$ ;  
 9)  $y = xe^{-1/x}$ ; 10)  $y = \ln x - x$ ; 11)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ; 12)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ; 13)  $y = \ln \frac{x}{x-1}$ .

Определить асимптоты графика функции

а)  $y = \frac{x^3}{x^2+2x-3}$ ; б)  $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$ .

Найти первообразные:

а)  $\int (3-x^2)^3 dx$ ; б)  $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ ; в)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ ; а)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; б)  
 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ ; в)  $\int xe^{-x^2} dx$ ; г)  $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$ .

Вычислить первообразные, применяя правило интегрирования по частям

а)  $\int \ln x dx$ ; б)  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad ; \quad \int_0^1 \arccos x dx$$

Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} \quad ; \quad \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad ; \quad \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

а)  $y=4-x^2, y=0$ ; б)  $y^2=2px, x=h$ ; в)  $y=\ln x, x=e, y=0$ ;  
 г)  $y=x^2, x+y=2$ ; д)  $y=2^x, x=0, y=2$ ;  
 е)  $y=x, y=\frac{1}{x^2}, y=0, x=3$ .

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси  $Ox$  фигур, ограниченных линиями:

а)  $y^2 = 9x, y=3x$ ; б)  $y=4x-x^2, y=x$ ; в)  $y^2=x, y=x^2$ ; г)  
 $y^2 - x^2 = 9, x-2y+6=0$ .

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси  $Oy$  фигур, ограниченных линиями:

а)  $y^2 = 4-x, x=0$ ; б)  $y=e^x, x=0, x=1, y=0$ ; в)  $y=x^3, y=1, x=0$ .

### **Примерный перечень вопросов к экзамену**

#### **Часть II. Математический анализ функций нескольких переменных**

*Дифференциальное исчисление.*

1. Определение открытого множества. Определение ограниченного множества. Примеры.
2. Определение замкнутого множества. Определение компакта. Может ли множество точек на плоскости быть одновременно открытым и замкнутым?
3. Определение области. Линии уровня функции. Направление наибольшего возрастания (убывания) функции в точке. Градиент.
4. Определение предела функции двух переменных.

5. Определение непрерывности функции. Свойства непрерывной функции, заданной на компактном множестве (показать на примере).
6. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных. Условие дифференцируемости функции в точке.
7. Связь между непрерывностью функции в точке и ее дифференцируемостью в этой точке.
8. Дифференциал функции. Правила вычисления дифференциалов 1-го и 2-го порядков.
9. Частные производные высшего порядка функции многих переменных. Теорема о равенстве смешанных частных производных 2-го порядка (формулировка).
10. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Дифференцирование функции одной переменной, заданной неявно.
11. Теорема о неявной функции.
12. Выписать формулу Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом 2-го порядка в форме Лагранжа.
13. Определение производной по направлению. Формула для производной функции по заданному направлению. Градиент функции, свойства градиента и антиградиента.

*Экстремум функций нескольких переменных.*

1. Локальный экстремум функции. Необходимое условие безусловного экстремума дифференцируемой функции.
2. Описание множества точек функции  $z=f(x, y)$ , подозрительных на экстремум.
3. Матрица Гессе. Определение положительной (отрицательной) определенности матрицы. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности матрицы.
4. Локальный экстремум функции. Достаточное условие экстремума функции многих переменных в критической точке при отсутствии ограничений.
5. Классическая задача математического программирования. Метод множителей Лагранжа. Достаточные условия локального условного экстремума функции нескольких переменных.
6. Классическая задача программирования. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия локального условного экстремума функции нескольких переменных.

*Обыкновенные дифференциальные уравнения.*

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения  $y'=f(x, y)$  (без доказательства).
2. Общее, частное и особое решения дифференциального уравнения  $y'=f(x, y)$ . Взаимное расположение интегральных кривых уравнения.
3. Нормальная форма дифференциального уравнения  $n$  – го порядка, раз-



- решенного относительно старшей производной.
4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Структура общего решения. Существуют ли особые решения линейного ОДУ?
  5. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (определение, метод интегрирования на примере  $xy' = tg \quad y$  ).
  6. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Сведение к уравнению с разделяющимися переменными.
  7. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) для поиска решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка (показать на примере  $xy' - y = 1/x$  ).
  8. Линейное дифференциальное уравнение  $n$  – го порядка с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью. Проверка условий теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для этого уравнения.
  9. Определитель Вронского для системы функций, формула Лиувилля (без доказательства). Теорема о линейной независимости  $n$  решений линейного дифференциального уравнения  $n$  – го порядка.
  10. Теорема о множестве решений однородного линейного дифференциального уравнения  $n$  – го порядка.
  11. Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение в случае существования простых корней характеристического уравнения.
  12. Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение в случае существования кратных корней характеристического уравнения.
  13. Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение, когда характеристическое уравнение не имеет корней.
  14. Структура частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида  $P_m(x) \cdot e^{\lambda x}$  , где  $P_m(x)$  – многочлен  $m$  – ой степени,  $\lambda$  – действительное число). Метод неопределенных коэффициентов.
  15. Структура частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида  $P_m(x) \cdot \cos x$  , где  $P_m(x)$  – многочлен  $m$  – ой степени. Метод неопределенных коэффициентов.
  16. Структура частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида  $P_m(x) \cdot \sin x$  , где  $P_m(x)$  – многочлен  $m$  – ой степени. Метод неопределенных коэффициентов.

## Примеры типовых задач в экзаменационных билетах

### Часть II. Математический анализ функций нескольких переменных

1. Изобразить на плоскости множество точек, в которых определена функция

$$f(x, y) = \frac{\ln y}{x + y}.$$

Является ли это множество областью?

2. Найти графически точки максимума и минимума функции  $f(x, y) = x + y$ , заданной на кривой  $x^2 + y^2 = 4$ .

3. Вычислить производную функции  $u = x^2 - xy + y^2$  в направлении биссектрисы второго координатного угла.

4. Вычислить первый и второй дифференциалы функции  $f(x, y) = xy + \sin(x^2 + y)$ .

Выписать все ее частные производные 1-го и 2-го порядков.

5. Показать, что предел по совокупности переменных

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}$$

не существует.

6. Исследовать на экстремум функцию  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ .

7. Найти экстремумы функции  $f(x, y) = xy$  при условии  $x^2 + xy + y^2 = 4$ .

8. Найти расстояние от точки  $P(1, 2)$  до параболы  $x = y^2$ .

9. Решить задачу Коши  $y(1) = 0$  для дифференциального уравнения  $y' = 2\sqrt{y}$ .

10. Записать общее решение уравнения

$$y' = \sqrt{x - y}$$

11. Найти особое решение дифференциального уравнения

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

12. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

13. Решить задачу Коши

$$y' - \frac{y}{x} = 1; \quad y(1) = 2$$

14. Решить дифференциальное уравнение  $y'' + 4y' + 4y = \sin 2x$ .

15. Решить задачу Коши  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  для дифференциального уравнения  $y'' - y' = x$ .

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### *Литература основная*

Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математический анализ Ч.1. М.: Юрайт, 2017 г., 244 с.

Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математический анализ Ч. 2. М.: Юрайт, 2017 г., 389 с.

### *Литература дополнительная*

Баврин, И. И. Математический анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 327 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-04617-5.

Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 703 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3701-5.

## 8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для организации самостоятельной подготовки обучающихся по дисциплине, им требуется обеспечить доступ к следующим электронным справочным ресурсам:

Библиотека: Электронная библиотечная система <http://www.iprbookshop.ru>

### Материально-техническое обеспечение дисциплины

При реализации образовательной программы по направлению подготовки **38.03.01 «ЭКОНОМИКА»** необходимо использовать следующие компоненты материально-технической базы Института для изучения дисциплины Аудиторный фонд.

1. Материально-технический фонд.

2. Библиотечный фонд.

Аудиторный фонд Института предлагает обустроенные аудитории для проведения лекционных занятий, практических занятий. Они оснащены столами, стульями, досками, техническим оборудованием.

Материально-технический фонд Института располагает проведением лекционных и практических занятий.

Проведение лекций обеспечено наличием мультимедийного проектора, ноутбука, экрана для демонстраций, мультимедийных презентаций, разработанных в программе PowerPoint.

Для повышения качества подготовки и оценки полученных знаний часть практических занятий планируется проводить в компьютерном классе с использованием компонентов Microsoft Office 2007, 2008, 2010: Word, Excel, Access, PowerPoint, Visio, 1С: Предприятие.

Материально-техническое обеспечение **практических /семинарских занятий** отображено в таблице.

#### **Очная / Заочная форма обучения:**

Оборудование
аудитория для семинарских <b>Для практических занятий: компьютерный класс</b> Для семинаров: аудитории или занятий, или читальный зал библиотеки, оборудованные учебной мебелью, компьютерами, имеющими выход в Интернет и необходимый комплект программного обеспечения, а также видеопроекторное оборудование для презентаций.

Библиотечный фонд Института обеспечивает доступ каждого обучающегося к базам данных, формируемым по полному перечню дисциплин. Во время самостоятельной подготовки обучающиеся обеспечены доступом к сети Интернет.

Библиотечный фонд укомплектован печатными и/или электронными изданиями основной и дополнительной учебной литературы, изданными за последние 5 лет.